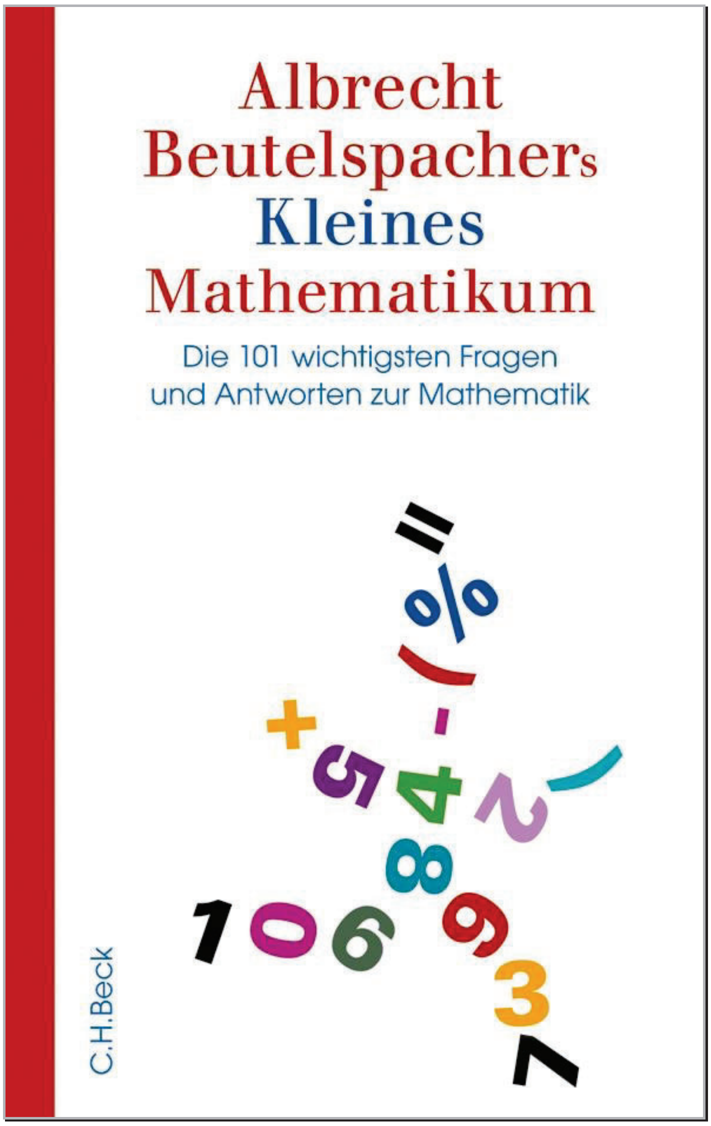
C.H.BECK
WWW.CHBECK.DE

Unverkäufliche Leseprobe



Albrecht Beutelspacher

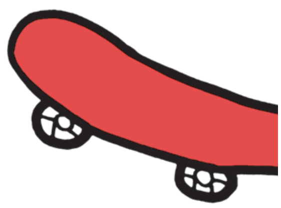
Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum

Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik

2025. 189 S., mit 10 Abbildungen im Text
ISBN 978-3-406-69706-7

Weitere Informationen finden Sie hier:
https://www.chbeck.de/16651882

Albrecht Beutelspachers
Kleines Mathematikum



Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum

Die 101 wichtigsten Fragen
und Antworten zur Mathematik

Verlag C. H. Beck

1. Auflage. 2010
2., durchgesehene Auflage. 2010
3., durchgesehene Auflage. 2010

Mit 10 Abbildungen im Text

Einige der Antworten wurden bereits unter dem Titel «Fragen an die Mathematik» im Hessischen Rundfunk (hr4) gesendet.

4., durchgesehene Auflage. 2016

Satz: Fotosatz Amann, Memmingen
Druck und Bindung: Pustet, Regensburg
Umschlaggestaltung: www.kunst-oder-reklame.de
Autorenfoto: © Christoph Mukherjee
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier
(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)
Printed in Germany
ISBN 978 3 406 69706 7

www.chbeck.de

Inhalt

Formen und Muster

Formeln

Zufall

Infinitesimal

Anwendungen

Probleme

Mathematiker

Lehren und lernen

Daneben und darüber hinaus

Vorwort

Das Mathematikum in Gießen ist ein mathematisches «Mitmachmuseum», das seit seiner Eröffnung im Jahr 2002 jährlich 150 000 Besucher jedes Alters anzieht. Diese vergnügen sich an den 150 Stationen, wo sie Knobelspiele lösen, mit Seifenhäuten experimentieren oder an sich selbst den Goldenen Schnitt entdecken. Fast automatisch lernen sie dabei mathematische Phänomene kennen, sie bilden sich Vorstellungen, und sie bekommen Einsichten.

Obwohl das Mathematikum ohne Gleichungen und Formeln auskommt, obwohl die Geschichte der Mathematik kaum thematisiert wird und obwohl es praktisch keine verbalen Erklärungen gibt, werden offenbar durch das Experimentieren bei vielen Besuchern Fragen angeregt. Jedenfalls werde ich häufig persönlich angesprochen, manche Menschen schreiben mir eine Mail und einige auch ganz traditionell einen Brief.

Die Fragen, die mir gestellt werden, sind in jeder Hinsicht bunt gemischt.

Manche Fragen sind mathematischer Natur: Wie groß ist die Chance, einen Sechser im Lotto zu tippen? Wie viele Reiskörner liegen auf dem Schachbrett? Was ist Fermats letzter Satz?

Es gibt Fragen zur Geschichte der Mathematik: Seit wann gibt es die Null? Warum gibt es keinen Nobelpreis für Mathematik? Was sind Hilberts Probleme?

Manche Fragen sind einfach zu beantworten: Wie groß ist ein DIN-A4-Papier? Ist 13 eine Unglückszahl? Was ist $1/2$ plus $1/3$?

Andere Fragen sind ausgesprochen schwierig: Kann man alles beweisen? Müssen Formeln sein? Warum ist minus mal minus gleich plus?

Und einige Fragen gehen erheblich über den sicheren Bereich der Mathematik hinaus: Können Außerirdische unsere Mathematik verstehen? Kann man die Existenz Gottes beweisen? Warum können Mathematiker nicht rechnen?

In diesem Buch habe ich meine Antworten aufgeschrieben. Dabei habe ich mich zum einen bemüht, die Fragen ernst zu nehmen. Die Antworten müssen richtig sein, ich kann nicht etwas zusammenphantasieren, sondern muss diese auch als Wissenschaftler verantworten können. Zum anderen habe ich auch den Fragesteller ernst genommen, indem ich immer versucht habe, klare Antworten zu geben. Denn letztlich will man ja doch wissen: «Was ist denn eigentlich los?»

Natürlich sind sowohl die Auswahl der Fragen als auch der Zuschnitt der Antworten persönlich geprägt. Und manchmal musste ich auch meinen Mut zusammennehmen, um die Antwort so klar, prägnant und pointiert stehen zu lassen. Ich habe mich dabei an dem wunderbaren Satz orientiert, den Theodor Fontane seinen Stechlin sagen lässt: «Unanfechtbare Wahrheiten gibt es überhaupt nicht, und wenn es welche gibt, so sind sie langweilig.»

Ich hoffe, mit diesem Buch alle Fragen beantwortet zu haben. Aber wenn Sie noch eine Frage haben und glauben, dass ich Ihnen helfen kann, dann schreiben Sie mir doch einfach: albrecht.beutelspacher@mathematikum.de.

Grundlagen

1
Was ist Mathematik?

Die schwierigste Frage zu Beginn!
Deshalb gebe ich gleich vier Antworten.

1. Man kann Mathematik dadurch definieren, dass man sie inhaltlich beschreibt, also die *Objekte* benennt, die in der Mathematik untersucht werden.

Traditionell unterscheidet man Geometrie, Algebra, Analysis und Stochastik. Geometrie ist die Lehre des uns umgebenden Raums, den wir dadurch zu erfassen versuchen, dass wir Punkte, Geraden, Ebenen, Dreiecke, Vierecke, Kreise und so weiter definieren und durch deren Studium ein immer besseres Verständnis des Raums erhalten. Wie die Geometrie hatte auch die Algebra ihre erste Blütezeit in der griechischen Antike. Man studiert unter diesem Begriff Zahlen und deren Eigenschaften, zum Beispiel Primzahlen. Die Analysis, auch Differential- und Integralrechnung genannt, ist die Lehre von Größen, die sich kontinuierlich verändern. Sie wurde wesentlich geprägt von Leibniz und Newton. Die Stochastik ist die jüngste der vier Disziplinen; sie ist die mathematische Lehre vom Zufall.

2. Man kann Mathematik auch dadurch definieren, dass man ihre *Methode* beschreibt, die sie aus der Menge aller anderen Wissenschaften heraushebt.

Was die Mathematik wirklich auszeichnet, ist der Beweis, also die rein logische Ableitung ihrer Aussagen.

Mathematik behandelt Begriffe, die klar definiert sind: Dreiecke, Vierecke, Kreise, ganze Zahlen, Primzahlen, Funktionen und so weiter. Sie behandelt Eigenschaften dieser Begriffe und Beziehungen dieser Eigenschaften: In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras.

Durch diese logischen Beziehungen wird Ordnung in die Welt der Begriffe gebracht.

3. Man kann auch den Blick nach außen wenden und das Augenmerk auf die *Beschreibung und Beherrschung der Welt* durch die Mathematik richten.

Galileo Galilei (1564–1642) war der Überzeugung, dass Mathematik die Sprache der Natur ist.

Mathematik ist das mächtigste Instrument, mit dem wir die Welt um uns herum beschreiben, erkennen und strukturieren können.

4. Eine moderne und, wie ich finde, sehr treffende Beschreibung stammt von dem Mathematiker Hans Freudenthal (1905–1990), der gleichermaßen als Fachwissenschaftler und als Didaktiker Herausragendes geleistet hat. Er sagt: «Mathematische Begriffe, Konzepte und Verfahren sind Werkzeuge, mit denen wir Phänomene der physikalischen, der sozialen und der mentalen Welt gedanklich organisieren.»

In dieser Definition kommt deutlich zum Ausdruck, dass Mathematik *von Menschen gemacht* wird: «*Wir* … organisieren.» Mathematik entsteht nicht von alleine, sondern durch aktives Handeln von Menschen.

Übrigens: Dieses Buch gibt noch 100 weitere Antworten auf die Frage, was Mathematik ist.

2
Seit wann gibt es Mathematik?

Mathematik ist – zusammen mit der Astronomie – die älteste Wissenschaft. Trotzdem gibt es mindestens drei Antworten auf die Frage, seit wann es Mathematik gibt.

Erste Antwort: seit etwa 30 000 Jahren. Aus dieser Zeit stammen die ersten Kulturzeugnisse der Menschheit, darunter auch Knochen, die viele Kerben enthalten. Diese sind so sorgfältig, so gleichmäßig und so systematisch ausgeführt, dass die Historiker sicher sind: Dabei handelt es sich um Zahlendarstellungen. Was damit gezählt wurde und warum, wissen wir nicht. Aber klar ist: Schon damals gab es Menschen, die gezählt haben und für die das Ergebnis so wichtig war, dass sie es mühsam in Knochen eingekerbt haben.

Die zweite Antwort lautet: Mathematik gibt es seit etwa 5000 Jahren. Damals benutzten sowohl die Babylonier als auch die Ägypter hoch entwickelte mathematische Methoden. Sie konnten Zahlen sinnvoll notieren, gewisse Gleichungen lösen, Kalenderberechnungen durchführen und Land vermessen. Dazu benutzten sie Erkenntnisse wie den Satz des Pythagoras, die wir heute, ohne zu zögern, der Mathematik zuordnen. Soweit wir das beurteilen können, wurden diese Erkenntnisse wie Naturgesetze angenommen. Das heißt, sie wurden an Beispielen überprüft und dann einfach verwendet.

Daher ist eine dritte Antwort notwendig. Diese lautet: Vor etwa 2500 Jahren haben die Griechen die Mathematik in unserem Sinne erfunden. Denn ihnen ist damals bewusst geworden, dass man durch genaues Nachdenken, scharfes Argumentieren sowie folgerichtiges Schließen zu Erkennt-

nissen gelangen kann und nicht nur durch Augenschein, Erfahrung und Intuition.

Damals wurden drei Begriffe geprägt: Definition, Satz, Beweis. Dieser Dreiklang ist heute etwas in Misskredit geraten – verständlicherweise, denn er wurde jahrzehntelang als didaktisches Allheilmittel benutzt, wofür er nie gedacht war.

In einer *Definition* wird ein Begriff präzise beschrieben und unmissverständlich von anderen abgegrenzt. In der Mathematik wissen wir immer ganz genau, worüber wir reden. Wenn wir «Kreis» sagen, dann meinen wir damit nicht irgendetwas Rundes, dem bei Bedarf irgendwelche Eigenschaften zugesprochen werden, sondern ein Kreis ist definiert als die Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Und man darf nur diese Eigenschaft benutzen.

Die Erkenntnisse der Mathematik werden in *Sätzen* dargestellt. Hier gilt Ähnliches wie bei den Definitionen: Wir wissen auch immer genau, was wir beweisen müssen oder was wir bewiesen haben.

Der *Beweis* ist die Methode der Mathematik zur Wahrheitssicherung. Das ist das «scharfe Nachdenken» in geordneter Form. Ein Beweis basiert auf rein logischen Schlussfolgerungen, ist also so objektiv wie möglich.

Ich weiß, dass viele Schülerinnen und Schüler sowie manche Studierende Beweise nicht mögen, und ich weiß auch, dass im Schulunterricht immer weniger Beweise vorkommen. Das finde ich nicht nur persönlich schade, sondern es ist ein Fehler. Denn genau dadurch zeichnet sich die Mathematik vor allen anderen Wissenschaften aus, dass man in ihr die Ergebnisse durch reine Logik und deshalb mit einem Höchstmaß an Objektivität erhält.

Denken Sie mal an den Satz des Pythagoras, den berühmtesten mathematischen Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck, dessen kurze Seiten die Längen a und b haben und dessen lange Seite die Länge c hat, gilt $a^2+b^2=c^2$. Dieser Satz wurde vor 2500 Jahren zum ersten Mal bewiesen, er gilt heute noch wörtlich so wie damals – und er wird auch in 2500 Jahren noch genauso gelten wie heute und damals! Welche Wissenschaft kann das von sich behaupten?

3
Welches ist das erste Mathematikbuch?

Etwa 300 Jahre vor Christus schrieb ein Mann ein Buch, das zu den Werken mit den größten Auswirkungen auf die Geschichte gehört. Es hat zwar keine politischen, gesellschaftlichen oder religiösen Umwälzungen hervorgebracht wie etwa die *Bibel*, der *Koran* oder *Das Kapital*, aber es hat einen kaum vorstellbaren Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaft genommen: Die Geschichte der Mathematik wäre ohne dieses Buch völlig anders verlaufen. Es ist das mit Abstand wichtigste – und übrigens auch erfolgreichste – Mathematikbuch aller Zeiten.

Der Mann hieß Euklid, und das Buch, das er schrieb, heißt *Die Elemente*.

Über den Menschen Euklid wissen wir fast nichts. Er wirkte vermutlich zwischen 320 und 260 v. Chr. in Alexandria, dem damaligen Wissenschaftszentrum der Welt, und gilt als Begründer der mathematischen Schule von Alexandria. Er hat zahlreiche Bücher verfasst, darunter sechs mathematische.

Euklids berühmtestes Werk sind zweifellos *Die Elemente*, ein Werk, das in 13 Bücher eingeteilt ist. Die Bücher I bis IV behandeln die Geometrie der Ebene, Buch V die Proportionenlehre, Buch VI stellt die Ähnlichkeitsgeometrie dar, die Bücher VII bis IX Zahlentheorie, Buch X studiert inkommensurable Strecken, die Bücher XI bis XIII behandeln schließlich räumliche Geometrie.

Wenn man das Buch aufschlägt, ist man verblüfft von dessen Nüchternheit. Es beginnt nicht mit einer programmatischen Vorrede, nicht mit einem Verweis auf die Vorgänger, nicht mit Danksagungen, sondern es geht direkt los. Definitionen, Axiome, Postulate, nur wenige Seiten und dann Sätze, Aufgaben und Konstruktionen.

Vermutlich gibt es kaum Sätze in den *Elementen*, die Euklid als Erster bewiesen hat. Das war nicht sein Ziel. Das Ziel der *Elemente* war es, das damalige mathematische Wissen systematisch zusammenzufassen. Schon eine bloße Zusammenfassung wäre eine bewundernswerte Leistung gewesen, die Euklid Unsterblichkeit gesichert hätte.

Aber das Buch ist kein Lexikon, auch keine Datenbank, in der alles gleichwertig nebeneinandersteht. Die Leistung Euklids besteht darin, alles in Form gebracht zu haben, in die mathematische Form. Und dies bedeutet, dass eines aus dem anderen folgt, ja folgen muss. Der Aufbau ist folgerichtig so, dass alle Aussagen bewiesen werden und zum Beweis nur logische Schlüsse zugelassen sind, in denen Aussagen benutzt werden, die schon bewiesen sind! Das heißt: Für die Aussage Nummer 29 darf man nur die Sätze 1 bis 28 verwenden. Das kann man natürlich nicht ad infinitum machen, sondern man muss auf irgendwelche Aussagen aufbauen: Dies sind die Grundsätze oder Postulate, zu denen wir heute Axiome sagen. Ein typisches Postulat lautet: Durch je zwei Punkte kann man eine gerade Linie ziehen. Also lautet die Regel: Zum Beweis des Satzes Nummer 29 darf man nur die Sätze 1 bis 28 und die Postulate verwenden.

Die Elemente sind ein stilbildendes Werk, das mustergültig den Aufbau einer Wissenschaft zeigt, ein Werk, das Orientierung gibt und Maßstäbe setzt!

Euklid hat einen De-facto-Standard geschaffen, der nun 2300 Jahre lang die Mathematik geprägt, ja definiert hat und dies tun wird, solange es Mathematik geben wird.

4
Was ist ein Punkt?

Der erste Satz des ersten Mathematikbuchs der Welt, der *Elemente* des Euklid, lautet: «Definitionen. 1. Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat.»

Natürlich beginnt Euklid mit Definitionen. Damit man genau weiß, worüber man spricht. Dann kommen die Postulate und Axiome, zum Beispiel «Gefordert soll sein, dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann», und anschließend folgen Sätze, die meist als herausfordernde Aufgabe gestellt sind. Der erste lautet: «Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten.»

All diese Sätze werden bewiesen. Das heißt, sie werden mit logischen Schlussregeln aus den Postulaten und Axiomen sowie den schon bewiesenen Sätzen gefolgert. Das ist perfekt und vorbildlich. So wie Mathematik sein soll.

Es bleibt nur ein kleiner Makel. Die erste Definition, die Definition eines Punktes, die so klar zu sein scheint, wird nie verwendet. Auch die zweite Definition: «Eine *Linie* ist eine breitenlose Länge», wird nie benutzt. Nie gibt es ein Argument, das sagt: «Aus der Definition eines Punktes, nämlich dass er keine Teile hat, folgt das und das.» Hat Euklid das vergessen?

Die Mathematik hat über 2000 Jahre gebraucht, um dieses Problem zu lösen. Immer wieder hat man versucht zu beschreiben, was denn ein Punkt wirklich *ist*. Dabei stellte sich allgemeines Unbehagen ein, nicht weil das zu schwierig oder gar unmöglich war, sondern weil man diese Definitionen allesamt nicht verwenden konnte. Das scheint negativ zu sein, aber es ist absolut positiv. Man *braucht* keine solche Definition. Man muss nicht wissen, was ein Punkt «ist», um Geometrie machen zu können. Das klingt paradox, aber es ist eine befreiende Erkenntnis.

Der Erste, der diese Erkenntnis klar aussprach, war der Gießener Mathematiker Moritz Pasch im 19. Jahrhundert. Das Problem, was denn ein Punkt sei, wurde nicht gelöst, sondern es hat sich aufgelöst. Es reicht, die Postulate und Axiome zu kennen. Das ist so ähnlich wie beim Schachspiel. Man muss nicht wissen, was ein Turm «ist», sondern muss nur die Regeln kennen, nach denen er zieht, schlägt und geschlagen wird.

Unübertrefflich drastisch hat dies David Hilbert zum Ausdruck gebracht, der bedeutendste Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Er sagt radikal: «Man muss jederzeit anstelle von ‹Punkten›, ‹Geraden› und ‹Ebenen› ‹Tische›, ‹Stühle› und ‹Bierseidel› sagen können.»